第21章古典的状況のもとでのシュレーディンガー方程式：超伝導のゼミナール

21-1　磁場内におけるシュレーディンガーの方程式

ベクトルポテンシャルの中での量子力学の法則は

$$< b|a >_A = < b|a >_{A=0} \exp\left\{\frac{iq}{\hbar}\int_a^b \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}\right\}$$

となる.

このときシュレーディンガーの方程式は

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\psi + q\phi\psi \qquad (21.3)$$

となる.

21-2 確率の連続の方程式

確率密度は

$$P(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)$$

で与えられる.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{J}$$

となるような $\mathbf{J}$ を求めると

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\hat{\mathcal{P}} - q\mathbf{A}}{m}\psi\right]^*\psi + \psi^*\left[\frac{\hat{\mathcal{P}} - q\mathbf{A}}{m}\psi\right]\right\}$$

となる.

21-3　2種類の運動量

$$\text{mv-運動量} = m\mathbf{v}$$

$$\text{p-運動量} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$$

で“ 運動学的運動量 ”=“ mv-運動量 ”と“ 力学的運動量 ”=“ p運動量 ”を定義する.

磁場のある場合 $\hat{\mathcal{P}}$ に対応しているのは p-運動量のほうである. 量子力学ではベクトルポテンシャルを突然変化させても波動関数の勾配は突然変化はしな

い．古典的に考えたときｐー運動量はベクトルポテンシャルを突然変えても突然変化はしない．

21-4　波動関数の意味

非常に多くの粒子が全く同じ状態にある場合 $\psi^*\psi$ を粒子の密度と解釈できる．そう解釈すると $\hat{\mathbf{J}}$ は電流密度となる．したがってこの場合はどうか酢は古典的な巨視的状況まで拡大された意味を持つ．

21-5　超伝導

格子内の原子の振動と電子との間の相互作用下人となって電子の間に小さな有効引力が存在する．その結果電子がまとまって束縛された対をつくる．熱的な攪乱によって電子対は分離する．しかし十分低い温度では電子対をつくる．束縛された一対の電子はボース粒子のように振舞う．そのためほとんど全部の電子対が正確に同じ状態に最低のエネルギーをもって閉じ込められることになる．

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{i\theta(\mathbf{r})} \qquad (21.17)$$

と表すと

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m}\left(\nabla\theta - \frac{q}{\hbar}\mathbf{A}\right)$$

となる．

($\because \nabla\psi = \nabla\sqrt{\rho}e^{i\theta} + \rho i\nabla\theta e^{i\theta}$ を代入して

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\hat{\mathcal{P}} - q\mathbf{A}}{m}\psi\right]^*\psi + \psi^*\left[\frac{\hat{\mathcal{P}} - q\mathbf{A}}{m}\psi\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{m}\frac{\hbar}{i}\nabla\psi\right)^*\psi + \psi^*\left(\frac{1}{m}\frac{\hbar}{i}\nabla\psi\right) - \frac{2qA}{m}\psi^*\psi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{\hbar}{mi}(\nabla\sqrt{\rho} - i\nabla\theta\sqrt{\rho})\sqrt{\rho} + \frac{\hbar}{mi}(\nabla\sqrt{\rho} + i\nabla\theta\sqrt{\rho})\sqrt{\rho} - \frac{2qA}{m}\rho\right) \\
&= \frac{\hbar}{m}\nabla\theta\rho - \frac{qA}{m}\rho
\end{aligned}$$

)

21-6　マイスナー効果

超伝導状態の金属に電気抵抗はない．そのため磁場は誘導電場に完全に打ち消されて金属の内部を貫通することが出来ない．

高温の金属片に磁場をかけると内部に磁場が出来る．その後金属を臨界温度以下に冷却すると磁場が金属片の外にはじき出される．

この現象を方程式を用いて調べた．$\mathbf{A}$ の発散が 0 であると仮定して

$$\nabla^2\mathbf{A} = \lambda^2\mathbf{A}$$

を導いた. ここで

$$\lambda^2 = \rho\frac{q}{\epsilon mc^2}.$$

これよりベクトルポテンシャルは物体の表面から内部に入るにしたがって指数関数的に減少することがわかる.

21-7　磁束の量子化

厚さが $1/\lambda$ 程度の環を持ってきてその環を貫いて磁場をかける．それからその環を超伝導状態まで冷却しもともとの $\mathbf{B}$ の源を取り除く．すると磁場は環に“ 捕捉 ”される．$\partial_t\Phi$ は環を取り巻く $\mathbf{E}$ の線積分に等しくそれは超伝導体の内部では 0 だから．環の本体の内部では $\mathbf{J} = 0$ よって

$$\hbar\nabla\theta = q\mathbf{A}$$

これを環の断面の中心近くを通る曲線上 Γ で積分して

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{q}{\hbar}\Phi.$$

Γ が閉曲線の場合には波動関数がただ一つの値を持つために $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi n\hbar$ が必要．よって

$$2\pi n\hbar = q\Phi,$$

ここで $q = 2q_e$(電子対の電荷).

21-8　超伝導の力学

$$\frac{\hbar}{m}\nabla\theta - \frac{q}{m}\mathbf{A} = \mathbf{v}$$

とかく．(21.3) に (21.17) を代入すると

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\rho\mathbf{v} \qquad (21.32)$$

と

$$\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - q\phi + \frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla^2(\sqrt{\rho})\right\} \tag{21.33}$$

(連続の方程式と $\hbar\theta$ を速度ポテンシャルとする荷電流体の運動方程式) が得られる.

(∵

$$\begin{aligned}
& -\frac{\hbar}{i}(\partial_t\sqrt{\rho}e^{i\theta} + \sqrt{\rho}\partial_t\theta e^{i\theta}) \\
= \ & \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\cdot\left(\frac{\hbar}{i}(\nabla\sqrt{\rho}e^{i\theta} + \sqrt{\rho}i\nabla\theta e^{i\theta}) - q\mathbf{A}\sqrt{\rho}e^{i\theta}\right) + q\phi\sqrt{\rho e^{i\theta}} \\
= \ & \frac{1}{2m}(-\hbar^2(\nabla^2(\sqrt{\rho})e^{i\theta} + 2i\nabla\sqrt{\rho}\cdot\nabla\theta e^{i\theta} + \sqrt{\rho}i\nabla^2\theta e^{i\theta} - \sqrt{\rho}(\nabla\theta)^2 e^{i\theta}) + i\hbar q\nabla\cdot\mathbf{A}\sqrt{\rho}e^{i\theta} \\
+ \ & i\hbar q\mathbf{A}\cdot\nabla\sqrt{\rho}e^{i\theta} - \hbar q\mathbf{A}\sqrt{\rho}\cdot\nabla\theta e^{i\theta} + i\hbar q\mathbf{A}\cdot\nabla\sqrt{\rho}e^{i\theta} - \hbar q\mathbf{A}\cdot\sqrt{\rho}\nabla\theta e^{i\theta} + (qA)^2\sqrt{\rho}e^{i\theta}) + q\phi\sqrt{\rho e^{i\theta}}
\end{aligned}$$

両辺を $e^{i\theta}$ で割って

$$\begin{aligned}
& -\hbar\sqrt{\rho}\partial_t\theta + \frac{i\hbar}{2}\rho^{-1/2}\partial_t\rho \\
= \ & -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\sqrt{\rho} + \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\rho}(\nabla\theta)^2 - \frac{2\hbar q}{2m}\mathbf{A}\sqrt{\rho}\cdot\nabla\theta + \frac{(qA)^2}{2m}\sqrt{\rho} + q\phi\sqrt{\rho} \\
- \ & i\frac{\hbar^2}{m}\nabla\sqrt{\rho}\cdot\nabla\theta - \frac{i\hbar^2}{2m}\sqrt{\rho}\nabla^2\theta + \frac{i\hbar q}{2m}\nabla\mathbf{A}\sqrt{\rho} + \frac{i\hbar q}{m}\mathbf{A}\cdot\nabla\sqrt{\rho} \\
= \ & -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\sqrt{\rho} + \frac{m}{2}\sqrt{\rho}\left(\frac{\hbar}{m}\nabla\theta - \frac{q}{m}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi\sqrt{\rho} \\
+ \ & i\hbar\left(-\frac{1}{2}\nabla\rho\cdot\nabla\frac{\hbar}{m}\theta\rho^{-1/2} - \frac{1}{2}\sqrt{\rho}\nabla^2\frac{\hbar}{m}\theta + \frac{1}{2}\nabla\cdot\frac{q}{m}\mathbf{A}\sqrt{\rho} + \frac{q}{2m}\mathbf{A}\cdot\nabla\rho\rho^{-1/2}\right) \\
= \ & -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\sqrt{\rho} + \frac{m}{2}\sqrt{\rho}v^2 + q\phi\sqrt{\rho} \\
+ \ & \frac{i\hbar}{2}\rho^{-1/2}\left(-\nabla\rho\cdot\nabla\frac{\hbar}{m}\theta - \rho\nabla^2\frac{\hbar}{m}\theta + \rho\nabla\cdot\frac{q}{m}\mathbf{A} + \frac{q}{m}\mathbf{A}\cdot\nabla\rho\right) \\
= \ & -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\sqrt{\rho} + \frac{m}{2}\sqrt{\rho}v^2 + q\phi\sqrt{\rho} \\
- \ & \frac{i\hbar}{2}\rho^{-1/2}\nabla\cdot(\rho\left(\frac{\hbar}{m}\nabla\theta - \frac{q}{m}\mathbf{A}\right)) \\
= \ & -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\sqrt{\rho} + \frac{m}{2}\sqrt{\rho}v^2 + q\phi\sqrt{\rho} - \frac{i\hbar}{2}\rho^{-1/2}\nabla\cdot\rho\mathbf{v}
\end{aligned}$$

実部と虚部を比較して (21.32), (21.33) を得る.)

これらとマクスウェルの方程式を用いて

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{comoving} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \nabla\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla^2\sqrt{\rho}\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{v} = -\frac{q}{m}\mathbf{B}$$

を得た．　ここで

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{comoving} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$$

21-9　ジョセフソン接合

２つの超伝導体のあいだに薄い不導体の層が挟まれているとする．一方の側に電子を発見する振幅を ψ_1 とし他方の側に電子を発見する振幅を ψ_2 とする．両側の物質が同じで接合が対称的であるとする．接合点を横切っての電位差を V とする．２つの振幅は

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \frac{qV}{2}\psi_1 + K\psi_2$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -\frac{qV}{2}\psi_2 + K\psi_1$$

となっている．

これに $\psi_1 = \sqrt{\rho_1}e^{i\theta_1}, \psi_2 = \sqrt{\rho_2}e^{i\theta_2}, \theta_2-\theta_1 = \delta$ を代入して実部と虚部を比較すると

$$\dot{\rho}_1 = \frac{2}{\hbar}K\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\delta,$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{2}{\hbar}K\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\delta, \qquad (21.42)$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{K}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\cos\delta - \frac{qV}{2\hbar},$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{K}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\cos\delta + \frac{qV}{2\hbar} \qquad (21.43)$$

が得られる．（∵

$$i\hbar((1/2)(\partial_t\rho_1)\rho_1^{-1/2}e^{i\theta_1} + \sqrt{\rho_1}i\partial_t\theta_1 e^{i\theta_1}) = \frac{qV}{2}\sqrt{\rho_1}e^{i\theta_1} + K\sqrt{\rho_2}e^{i\theta_2}$$

$$i\hbar((1/2)(\partial_t\rho_2)\rho_2^{-1/2}e^{i\theta_2}+\sqrt{\rho_2}i\partial_t\theta_2e^{i\theta_2})=-\frac{qV}{2}\sqrt{\rho_2}e^{i\theta_2}+K\sqrt{\rho_1}e^{i\theta_1}$$

$e^{i\theta}$ をオイラーの公式を用いて三角関数に直すと

$$\begin{aligned}&i\hbar((1/2)(\partial_t\rho_1)\rho_1^{-1/2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+\sqrt{\rho_1}i\partial_t\theta_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1))\\=\ &\frac{qV}{2}\sqrt{\rho_1}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+K\sqrt{\rho_2}(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&i\hbar((1/2)(\partial_t\rho_2)\rho_2^{-1/2}(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)+\sqrt{\rho_2}i\partial_t\theta_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\=\ &-\frac{qV}{2}\sqrt{\rho_2}(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)+K\sqrt{\rho_1}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\end{aligned}$$

これらの実部と虚部をまとめると

$$\begin{aligned}&i\hbar((1/2)(\partial_t\rho_1)\rho_1^{-1/2}\cos\theta_1-\sqrt{\rho_1}(\partial_t\theta_1)\sin\theta_1)\\-\ &\hbar((1/2)(\partial_t\rho_1)\rho_1^{-1/2}\sin\theta_1+\sqrt{\rho_1}(\partial_t\theta_1)\cos\theta_1)\\=\ &i((qV/2)\sqrt{\rho_1}\sin\theta_1+K\sqrt{\rho_2}\sin\theta_2)\\+\ &(qV/2)\sqrt{\rho_1}\cos\theta_1+K\sqrt{\rho_2}\cos\theta_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&i\hbar((1/2)(\partial_t\rho_2)\rho_2^{-1/2}\cos\theta_2-\sqrt{\rho_2}(\partial_t\theta_2)\sin\theta_2)\\-\ &\hbar((1/2)(\partial_t\rho_2)\rho_2^{-1/2}\sin\theta_2+\sqrt{\rho_2}(\partial_t\theta_2)\cos\theta_2)\\=\ &i(-(qV/2)\sqrt{\rho_2}\sin\theta_2+K\sqrt{\rho_1}\sin\theta_1)\\-\ &(qV/2)\sqrt{\rho_2}\cos\theta_2+K\sqrt{\rho_1}\cos\theta_1\end{aligned}$$

これらの実部と虚部を比較して

$$\begin{aligned}&\hbar((1/2)(\partial_t\rho_1)\rho_1^{-1/2}\cos\theta_1-\sqrt{\rho_1}(\partial_t\theta_1)\sin\theta_1)\\=\ &(qV/2)\sqrt{\rho_1}\sin\theta_1+K\sqrt{\rho_2}\sin\theta_2\qquad(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\hbar((1/2)(\partial_t\rho_1)\rho_1^{-1/2}\sin\theta_1+\sqrt{\rho_1}(\partial_t\theta_1)\cos\theta_1)\\=\ &(qV/2)\sqrt{\rho_1}\cos\theta_1+K\sqrt{\rho_2}\cos\theta_2\qquad(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\hbar((1/2)(\partial_t\rho_2)\rho_2^{-1/2}\cos\theta_2-\sqrt{\rho_2}(\partial_t\theta_2)\sin\theta_2)\\=\ &-(qV/2)\sqrt{\rho_2}\sin\theta_2+K\sqrt{\rho_1}\sin\theta_1\qquad(3)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\hbar((1/2)(\partial_t\rho_2)\rho_2^{-1/2}\sin\theta_2+\sqrt{\rho_2}(\partial_t\theta_2)\cos\theta_2) \\
= \quad & -(qV/2)\sqrt{\rho_2}\cos\theta_2+K\sqrt{\rho_1}\cos\theta_1 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$(1)\times\cos\theta_1-(2)\times\sin\theta_1$

$$
\frac{\hbar}{2}(\partial_t\rho_1)\rho_1^{-1/2}=K\sqrt{\rho_2}\sin(\theta_2-\theta_1)
$$

$(1)\times\sin\theta_1-(2)\times\cos\theta_1$

$$
-\hbar\sqrt{\rho_1}\partial\theta_1=\frac{qV}{2}\sqrt{\rho_1}+K\sqrt{\rho_2}\cos(\theta_2-\theta_1)
$$

$(3)\times\cos\theta_2-(4)\times\sin\theta_2$

$$
\frac{\hbar}{2}(\partial_t\rho_2)\rho_2^{-1/2}=-K\sqrt{\rho_1}\sin(\theta_2-\theta_1)
$$

$(3)\times\sin\theta_2 1-(4)\times\cos\theta_2$

$$
-\hbar\sqrt{\rho_2}\partial\theta_2=-\frac{qV}{2}\sqrt{\rho_2}+K\sqrt{\rho_1}\cos(\theta_2-\theta_1)
$$

)

これより 1 の側から 2 の側へ流れる電流は

$$
J=\frac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\delta=J_0\sin\delta
$$

となる．　ここで $J_0=\frac{2K\rho_0}{\hbar}$.

(21. 43) を積分して

$$
\delta(t)=\delta_0+\frac{q}{\hbar}\int V(t)dt
$$

が得られる．直流電圧 V_0 をかけた場合 $\delta=\delta_0+(q/\hbar)Vt$ となり $\sin\delta$ は急速に振動し流れる正味の電流は存在しないことになる．電圧が 0 の場合には電流は δ_0 の値により $-J_0$ から J_0 の値をとる．$V=V_0+v\cos\omega t,\omega=\frac{q}{\hbar}V_0$ という高周波の電圧を書けた場合にも電流は流れる．

次に P から Q へ行く 2 つの道筋に 2 つの接合 a,b がある場合を考える．a,b を通る電流を J_a,J_b, その位相を δ_a,δ_b とする．

$$
\delta_b-\delta_a=\frac{2q_e}{\hbar}\Phi
$$

を示した. $\delta_a = \delta_0 + \frac{q_e}{\hbar}\Phi, \delta_b = \delta_0 - \frac{q_e}{\hbar}\Phi$ と書くと

$$J_{total} = J_0 \sin\delta_0 \cos\frac{q_e\Phi}{\hbar}$$

となった. ($J_{total} = 2J_0 \sin\delta_0 \cos\frac{q_e\Phi}{\hbar}$ ではないか? 棚上げ問) したがって $\Phi = n\frac{\pi\hbar}{q_e}$ のとき電流は最大値を持つ. Φ はソレノイドを貫く磁束だったが超伝導体のワイヤー自身の上にはほとんど磁場がないように出来る. それでも電流の大きさが Φ に依存するということはベクトルポテンシャルが“ 物理的実在 ”であることの証拠である.