問題 2-1

$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ よってラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=m\ddot{x}=0$$

この解は

$$x=v(t-t_a)+x_a$$

とかける.

$$\dot{x}=v=\frac{x_b-x_a}{t_b-t_a}.$$

よって古典的運動に対する作用は

$$S_{cl}=\int_{t_a}^{t_b}Ldt=\int_{t_a}^{t_b}\frac{1}{2}mv^2=\frac{m}{2}\frac{(x_b-x_a)^2}{t_b-t_a}.$$

問題 2-2

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)$$

ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=m\ddot{x}-m\omega^2x=0$$

よって

$$\ddot{x}=-\omega^2x.$$

これを解くと

$$x=ae^{i\omega t}+be^{-i\omega t}.$$

よって

$$x_a=ae^{i\omega t_a}+be^{-i\omega t_a}$$

$$x_b=ae^{i\omega t_b}+be^{-i\omega t_b}.$$

上式から a,b を求めると

$$a=\frac{x_ae^{-i\omega t_b}-x_be^{-i\omega t_a}}{e^{-i\omega T}-e^{i\omega T}}$$

$$b=\frac{x_ae^{i\omega t_b}-x_be^{i\omega t_a}}{e^{-i\omega T}-e^{i\omega T}},$$

ここで $T = t_b - t_a$.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) = -m\omega^2(a^2 e^{2i\omega t} + b^2 e^{-i\omega t})$$

$$\int_{t_a}^{t_b} L dt = -\frac{m\omega^2}{2i\omega}(a^2(e^{2i\omega t_b} - e^{2i\omega t_a}) - b^2(e^{-2i\omega t_b} - e^{-2i\omega t_a})).$$

これに求めた a, b の値を代入すると古典的作用は

$$\begin{aligned} & -\frac{m\omega^2}{2i\omega}((\frac{x_a e^{-i\omega t_b} - x_b e^{-i\omega t_a}}{e^{-i\omega T} - e^{i\omega T}})^2(e^{2i\omega t_b} - e^{2i\omega t_a}) - (\frac{x_a e^{i\omega t_b} - x_b e^{i\omega t_a}}{e^{-i\omega T} - e^{i\omega T}})^2(e^{-2i\omega t_b} - e^{-2i\omega t_a})) \\ = & \frac{m\omega}{2\sin\omega t}((x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b) \end{aligned}$$

問題 2-3

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - Fx$$

ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + F = 0$$

よって

$$\ddot{x} = -\frac{F}{m}.$$

これを解くと

$$x(t) = -\frac{F}{2m}t^2 + v_0 t + c$$

$$x_a = -\frac{F}{2m}t_a^2 + v_0 t_a + c$$

$$x_b = -\frac{F}{2m}t_b^2 + v_0 t_b + c$$

これから v_0, c を求めると

$$v_0 = \frac{x_b - x_a}{T} + \frac{F}{2m}(t_a + t_b),$$

$$c = \frac{x_a t_b - x_b t_a}{T} - \frac{F}{2m}t_a t_b.$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - Fx = \frac{F^2 t^2}{m} - 2Fv_0 t + \frac{mv_0^2}{2} - Fc$$

$$\int_{t_a}^{t_b} L dt = \frac{F^2(t_b^3 - t_a^3)}{3m} - Fv_0(t_b^2 - t_a^2) + (\frac{mv_0^2}{2} - Fc)(t_b - t_a)$$

これに求めた v_0, c の値を代入して $\frac{F^2}{m}, F, \frac{m}{T}$ を係数にもつ項をまとめると

$$\begin{aligned}
& \frac{F^2(t_b^3-t_a^3)}{3m} - F(\frac{x_b-x_a}{T}+\frac{F}{2m}(t_a+t_b))(t_b^2-t_a^2) \\
+ & (\frac{m}{2}(\frac{x_b-x_a}{T}+\frac{F}{2m}(t_a+t_b))^2 - F(\frac{x_at_b-x_bt_a}{T}-\frac{F}{2m}t_at_b))(t_b-t_a) \\
= & \frac{F^2}{m}\frac{1}{24}(t_a-t_b)^3 + F\frac{1}{2}(t_a-t_b)(x_a+x_b)+\frac{m}{2T}(x_b-x_a)^2 \\
= & \frac{m}{2T}(x_b-x_a)^2 - \frac{FT}{2}(x_a+x_b) - \frac{T^3F^2}{24m}
\end{aligned}$$

2-4

古典力学では運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

と定義される.

端点での運動量が

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x=x_a} = -\frac{\partial S_{cl}}{\partial x_a}$$

となることを示す.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta x \frac{\partial L}{\partial x}\Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}L\right) \\
&= -\delta x \frac{\partial L}{\partial x}\Big|_{t_a}
\end{aligned}$$

2-5

古典力学ではエネルギーは

$$E = -L + \dot{x}p$$

で定義される.

$$-L + \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{S_{cl}}{\partial t_b}$$

を示す.

$$S_{cl} = \int L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}, t)dt$$

x_{cl} は x_b に達する時間によって決まる古典軌道.

$$
\begin{aligned}
S(t_b+\delta) &= \int_{t_a}^{t_b+\delta} L(x_{cl,t_b+\delta}, \dot{x}_{cl,t_b+\delta}, t)dt \\
&= \int_{t_a}^{t_b} L(x_{cl,t_b+\delta}, \dot{x}_{cl,t_b+\delta}, t)dt + \int_{t_b}^{t_b+\delta} L(x_{cl,t_b+\delta}, \dot{x}_{cl,t_b+\delta}, t)dt \\
&= S(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} \delta \frac{\partial x_{cl,tb}}{\partial t_b} \frac{\partial L}{\partial x}(x_{cl,t_b}, \dot{x}_{cl,t_b}, t) + \delta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_{cl,tb}}{\partial t_b}\right) \frac{\partial L}{\partial x}(x_{cl,t_b}, \dot{x}_{cl,t_b}, t)dt + \delta L(t_b) \\
&= S(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} \delta \frac{\partial x_{cl,tb}}{\partial t_b} \frac{\partial L}{\partial x}(x_{cl,t_b}, \dot{x}_{cl,t_b}, t) - \delta \frac{\partial x_{cl,tb}}{\partial t_b} \frac{\partial L}{\partial x}(x_{cl,t_b}, \dot{x}_{cl,t_b}, t)dt \\
&+ \left[\delta \frac{\partial x_{cl,t_b}}{\partial t_b} \frac{\partial L}{\partial x}(x_{cl,t_b}, \dot{x}_{cl,t_b}, t)\right]_{t_a}^{t_b} + \delta L(t_b)
\end{aligned}
$$

$$
x_{cl,t_b}(t_b) - x_{cl,t_b+\delta}(t_b) \simeq \dot{x}_{cl,t_b+\delta}\delta
$$

を用いて

$$
S(t_b+\delta) = S(t_b) - \frac{dx_{cl,t_b}}{dt} \frac{\partial L}{\partial x}(x_{cl,t_b}, \dot{x}_{cl,t_b}, t) + \delta L(t_b)
$$